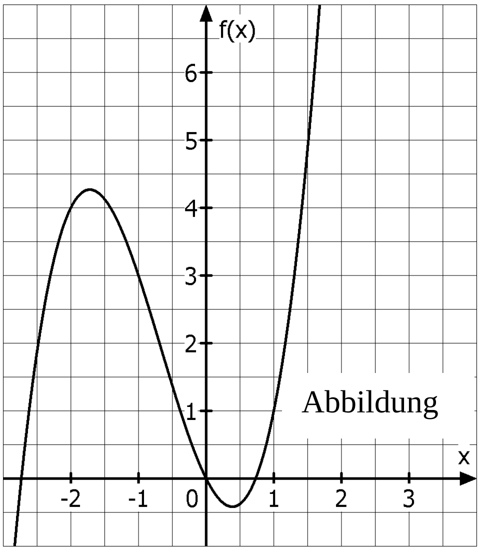
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x$. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f.*



(1) *Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Entscheiden Sie begründet mit Hilfe einer Zeichnung in der Abbildung, ob die Gerade g mit* $g: y = \frac{1}{2}x + 5$ *eine Tangente am Graphen von f im Punkt* $P(-2|4)$ *ist.*

(6 Punkte)

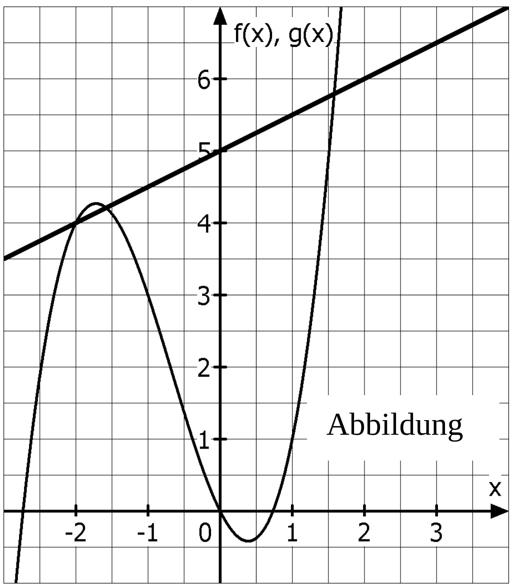
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x - 2\right) = 0$

Also $x_1 = 0$. Zusätzlich: $x^2 + 2 \cdot x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+2}$. Die drei Nullstellen sind $x_1 = 0$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = -1 + \sqrt{3}$.

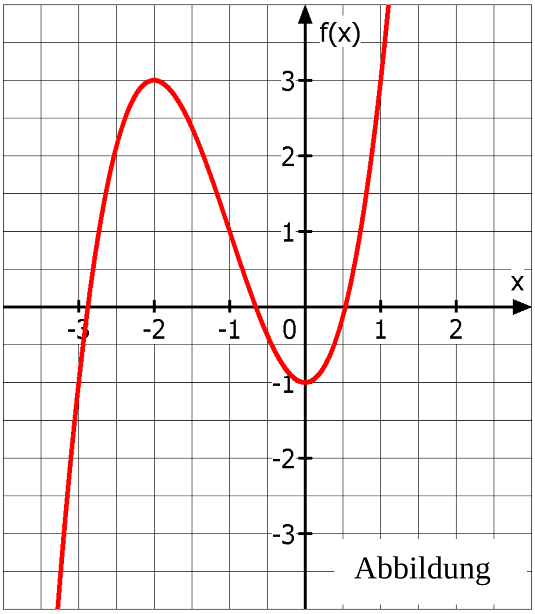
(2) Einzeichnen der Geraden g (siehe Abbildung rechts). Man sieht deutlich, dass g den Graphen von f im Punkt $P(-2|4)$ nicht berührt, sondern schneidet. Daher kann g keine Tangente am Graphen von f im Punkt P sein.



Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 1$. Die Koordinaten des lokalen Hochpunktes und des lokalen Tiefpunktes sind ganzzahlig. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f*.



Abbildung

(1) *Entscheiden Sie begründet, ob der Graph der Ableitungsfunktion f' eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel ist.*

(2) *Geben Sie alle Werte für den Parameter c an, so dass die Funktion g_c mit der Gleichung $g_c(x) = f(x) + c$ genau zwei Nullstellen besitzt. Begründen Sie Ihre Angabe.*

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Es gilt: $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x$. Das Vorzeichen des Koeffizienten vor x^2 entscheidet, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Weil $3 > 0$ gilt, ist die Parabel nach oben geöffnet.

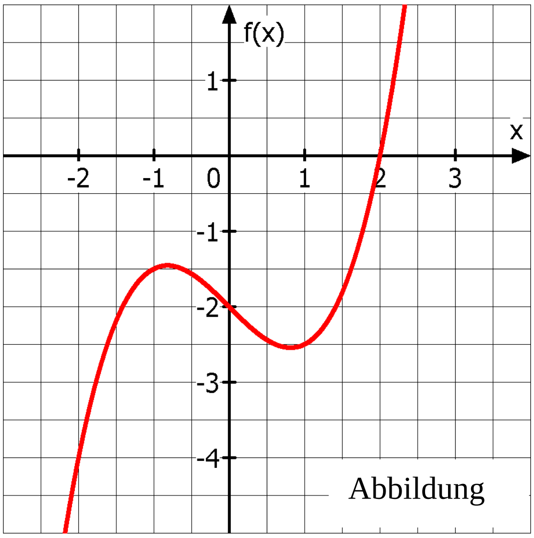
Oder: Die Parabel von f' besitzt die Nullstellen $x = -2$ und $x = 0$, denn sie sind die lokalen Extremstellen von f. Nur dazwischen fällt der Graph von f, also liegt die Parabel von f' für $-2 < x < 0$ unterhalb der x-Achse. Die Parabel muss also nach oben geöffnet sein.

(2) $c = -3$ oder $c = 1$. Damit es genau zwei Nullstellen gibt, muss der Graph von f die x-Achse im Hochpunkt oder im Tiefpunkt berühren. Somit muss entweder der Hochpunkt um drei Einheiten nach unten oder der Tiefpunkt um eine Einheit nach oben verschoben werden.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3-x-2$. Der Graph ist in der Abbildung dargestellt.



Abbildung

(1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die in der Zeichnung erkennbare Nullstelle tatsächlich eine Nullstelle ist.*

(2) *Gegeben ist die Funktion g_a mit der Gleichung $g_a(x)=f(x+a)$. Geben Sie an, wie sich der Graph von g_a verändert, wenn man für a immer größere Zahlen einsetzt.*

Geben Sie außerdem einen Wert für a an, so dass die Funktion g_a die Nullstelle $x=-1$ besitzt.

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Am Graphen ist erkennbar, dass $x=2$ die vermutliche Nullstelle ist.

Zum rechnerischen Nachweis: Setze $x=2$ in $f(x)$ ein.

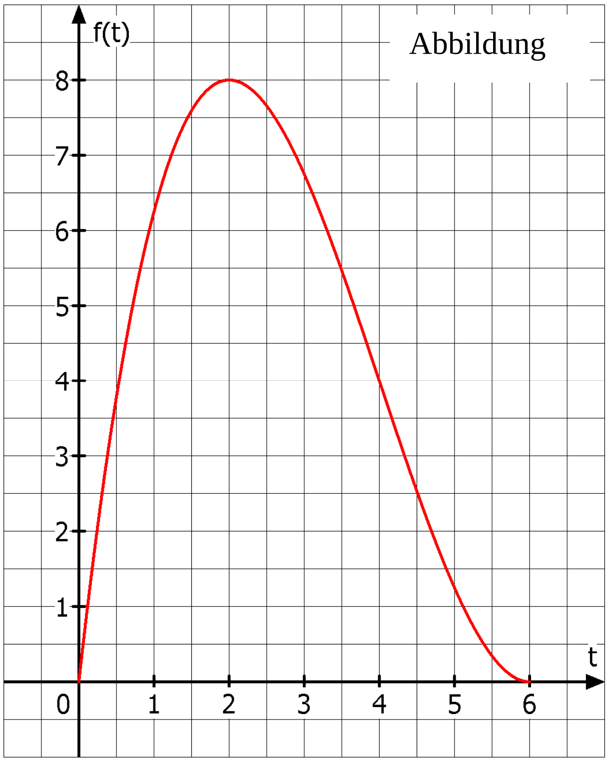
Wegen $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^3-2-2=\frac{8}{2}-2-2=4-2-2=0$ ist $x=2$ eine Nullstelle von *f*.

(2) Je größer a wird, desto weiter wird der entsprechende Graph der Funktion g_a nach links verschoben. Damit $x=-1$ eine Nullstelle wird, muss der Graph von f um drei Einheiten nach links verschoben werden, also muss $a=3$ gelten.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 4 zur Analysis

Die Funktion f mit der Gleichung $f(t)=\frac{1}{4}\cdot t^3-3\cdot t^2+9\cdot t$ beschreibt näherungsweise die Wachstums*geschwindigkeit* einer Pflanze in der Einheit $\frac{cm}{Woche}$. Dabei gibt t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn an, es gilt: $0\le t\le 6$. Der Graph der Funktion f ist in der Abbildung dargestellt.



(1) *Berechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze nach zwei Wochen.*

(2) Nehmen Sie an, die Pflanze hätte nach vier Wochen eine Höhe von 70 cm.
Entscheiden Sie, welche der drei nachfolgenden Aussagen stimmt. Kreuzen Sie dazu auf dem Arbeitsblatt an.

Nach fünf Wochen ist die Pflanze

O kleiner als 74 cm oder

O gleich 74 cm oder

O größer als 74 cm.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 4 zur Analysis

Beispiellösung

(1) $f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-3\cdot 2^2+9\cdot 2=\frac{8}{4}-12+18=8$.

Die Wachstumsgeschwindigkeit betrug zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn acht Zentimeter pro Woche.

(2) Aus dem Graphen kann man ablesen, dass die Wachstumsgeschwindigkeit nach vier Wochen 4 cm pro Woche betrug und danach nur noch fällt. Also ist die Pflanze nach fünf Wochen kleiner als 74 cm.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

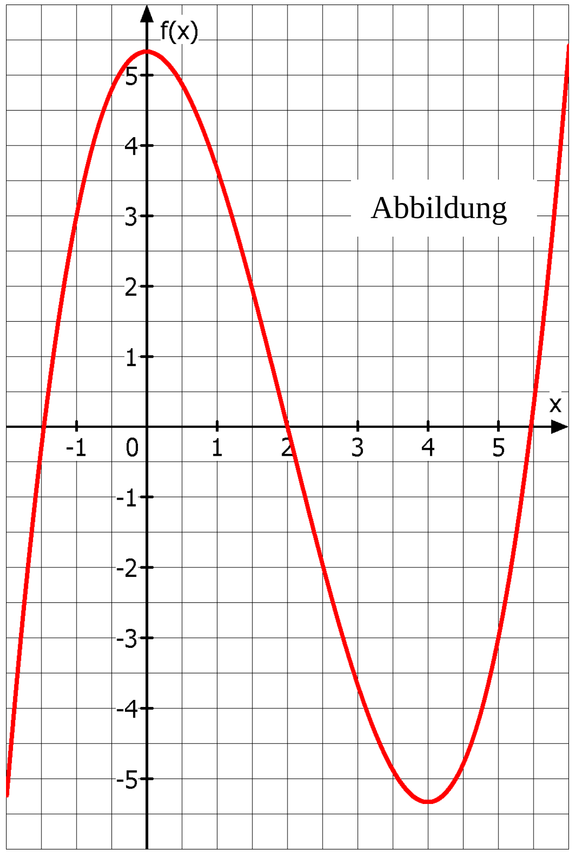
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 5 zur Analysis

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-2\cdot x^2+\frac{16}{3}$.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(2\,|\,0)$.*

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von f' in die Abbildung.*

(6 Punkte)



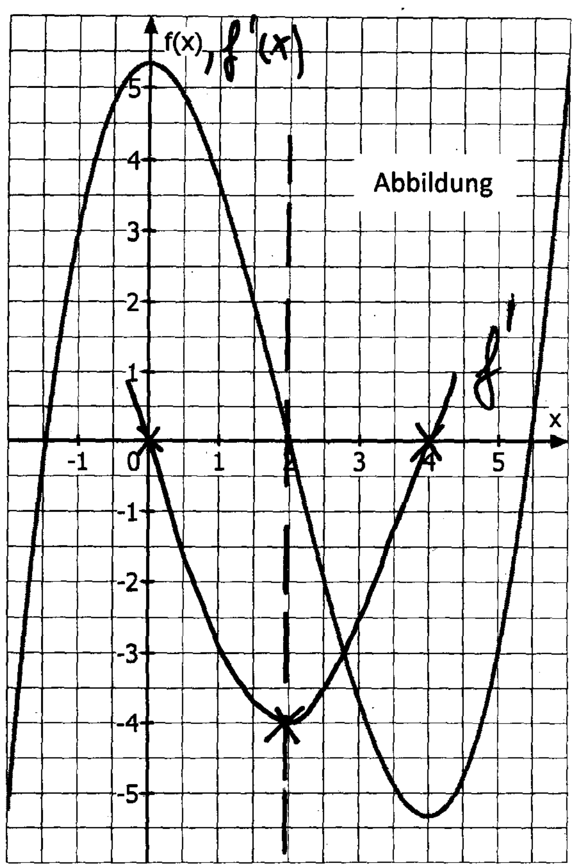
Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 5 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Gesucht ist die Gleichung zu t mit $t(x)=m\cdot x+b$.

Mit $f'(x)=x^2-4x$ gilt für die Steigung von t: $m=f'(2)=4-4\cdot 2=-4$. Einsetzen von $m=-4$ und den Koordinaten von $P(2|0)$ ergibt: $0=-4\cdot 2+b \Leftrightarrow b=8$. Also lautet die Tangentengleichung: $t(x)=-4\cdot x+8$.

(2) Eine Skizze der Parabel von f' ist rechts abgebildet.



Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 6 zur Analysis

Gegeben ist eine Funktion *f*. Die Abbildung 1 zeigt die Parabel ihrer Ableitungsfunktion f' mit der Gleichung

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3.$$

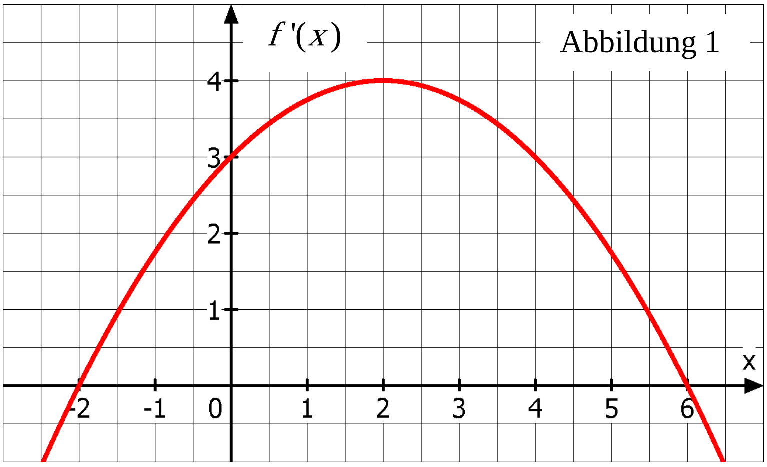


Abbildung 1

(1) Die Parabel von f' besitzt die beiden *Nullstellen* $x = -2$ *und* $x = 6$. *Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Nullstellen rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunktes S der Parabel.*

(2) *Begründen Sie, dass keine der beiden Abbildungen 2 und 3 den Graphen der Funktion f zeigt. Führen Sie jeweils mindestens ein Gegenargument auf.*

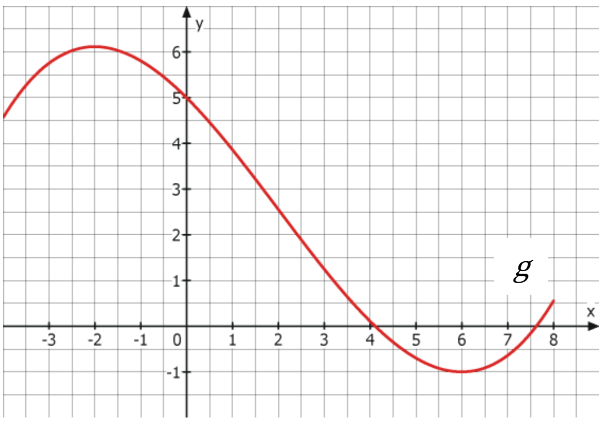


Abbildung 2

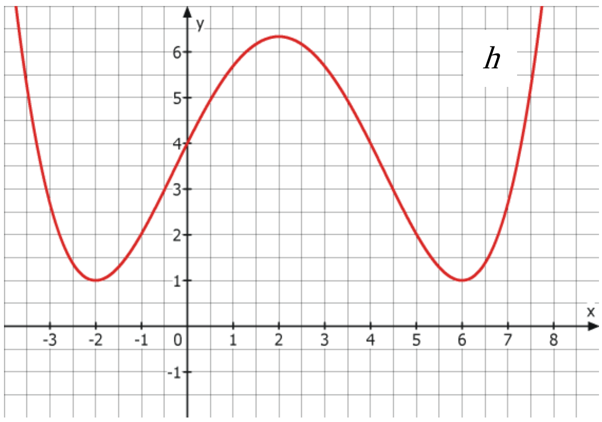


Abbildung 3

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 6 zur Analysis

Beispiellösung

(1) Aus Symmetriegründen liegt die x-Koordinate des Scheitelpunktes S in der Mitte der beiden Nullstellen -2 und 6. Die Mitte ist 2. $f'(2) = -\frac{1}{4}\cdot 2^2 + 2 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$.

Der Scheitelpunkt S besitzt somit die Koordinaten $S(2|4)$.

(2) Der Graph der Funktion g in Abbildung 2 besitzt an der Stelle $x = 2$ eine negative Steigung, während am Graphen von Abbildung 1 abzulesen ist: $f'(2) = 4 > 0$.

Der Graph der Funktion h in Abbildung 3 zeigt drei lokale Extremstellen. Wegen der notwendigen Bedingung für Extremstellen hat h' mindestens drei Nullstellen, aber f' hat nur zwei Nullstellen.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Stochastik

Ein Supermarkt verwendet für die Bearbeitung zurückgegebener Pfandflaschen eine Maschine. Diese soll einwandfreie Flaschen von deformierten Flaschen unterscheiden. Zurückgegebene Flaschen werden entweder von der Maschine abgewiesen oder angenommen. Dabei unterlaufen dem Gerät auch Fehler: Es werden manchmal auch einwandfreie Flasche abgewiesen oder deformierte Flasche angenommen. Eine Übersicht über Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang liefert die noch unvollständige Vierfeldertafel (Tabelle).

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05

Tabelle

(1) In den beiden doppelt umrandeten Kästchen der letzten Zeile fehlen zwei Wahrscheinlichkeiten in dem vorliegenden Sachzusammenhang.

Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten und geben Sie diese in den Kästchen an.

(2) *Geben Sie die Bedeutung der beiden Wahrscheinlichkeiten aus (1) in dem vorliegenden Sachzusammenhang an.*

(3) Eine Flasche wird abgewiesen.

Ermitteln Sie einen Term, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Flasche in Ordnung ist.

Hinweis: Die konkrete Berechnung wird nicht verlangt. **(6 Punkte)**

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 1 zur Stochastik

Beispiellösung

(1) $0,9405 + 0,0015 = 0,942$ und $0,0095 + 0,0485 = 0,058$.

	Flasche angenommen	Flasche abgewiesen	
Flasche einwandfrei	0,9405	0,0095	0,95
Flasche deformiert	0,0015	0,0485	0,05
	0,942	**0,058**	

(2) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,2 % wird eine Flasche von der Maschine angenommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,8 % wird eine Flasche von der Maschine abgewiesen.

(3) Man teilt den Anteil der abgewiesenen einwandfreien Flaschen durch den Anteil aller abgewiesenen Flaschen. Das ergibt: $\frac{0,0095}{0,0095+0,0485}$.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Stochastik

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung 1. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Zu dem Zufallsexperiment wurde das Baumdiagramm aus Abbildung 2 erstellt.

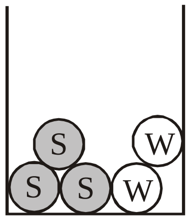


Abbildung 1

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dem Zufallsexperiment mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird.*

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

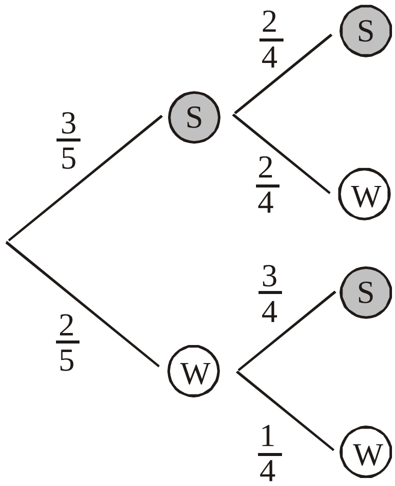


Abbildung 2

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 2 zur Stochastik

Beispiellösung

(1) P(„mindestens eine schwarze Kugel“) = 1 - P(„keine schwarze Kugel“) = $1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}=90\%$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt 90%.

(2) Anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann der Erwartungswert μ berechnet werden:

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=0{,}1$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=0{,}6$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0{,}3$

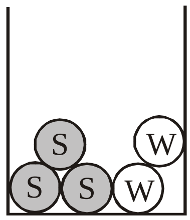
$\mu=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}3=1{,}2$

Der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X beträgt 1,2.

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Stochastik

In einer Urne befinden sich zu Beginn eines Zufallsexperiments drei schwarze Kugeln (S) und zwei weiße Kugeln (W), siehe Abbildung. Elena macht folgendes Zufallsexperiment: Sie zieht so lange ohne Zurücklegen Kugeln aus der Urne, bis sie zum ersten Mal eine weiße Kugel gezogen hat. Ein möglicher Versuchsausgang ist zum Beispiel s – s – w, hier gibt es drei Züge.



Abbildung

(1) *Zeichnen Sie für Elenas Zufallsexperiment ein vollständiges Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.*

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Züge des Experimentes.

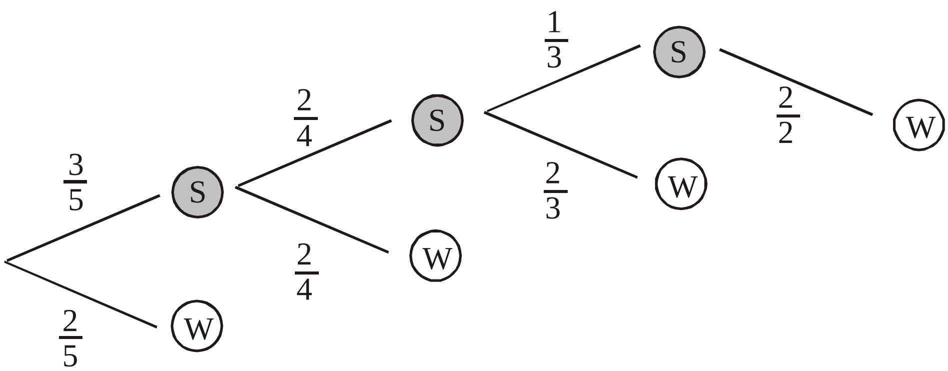
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

(6 Punkte)

Hilfsmittelfreier Teil. Beispielaufgabe 3 zur Stochastik

Beispiellösung

(1)



(2)

k	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{10}$

Der gewählte Lösungsansatz und –weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Beispiellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet.