Beispielaufgabe zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}75 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 2$.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' .

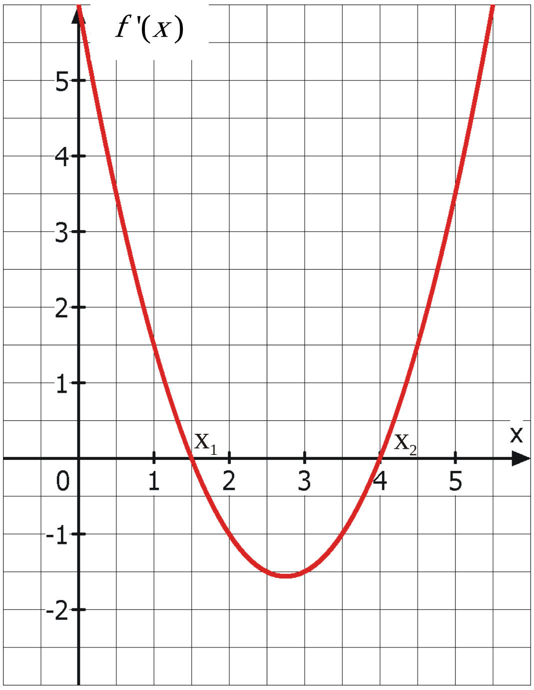


Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie die beiden Stellen x_1 und x_2, an denen die erste Ableitung f' den Wert Null besitzt.*

(2) *Geben Sie an, ob an der Stelle x_1 ein lokaler Hoch- oder ein lokaler Tiefpunkt des Graphen von f vorliegt, und begründen Sie Ihre Angabe mit Hilfe der Abbildung 1.*

(6 Punkte)

b) *Ermitteln Sie grafisch einen Näherungswert für die Steigung der in Abbildung 1 dargestellten Parabel an der Stelle $x = 4{,}5$.*
Zeichnen Sie dazu in die Abbildung 1 auch ein geeignetes beschriftetes Steigungsdreieck ein.

(3 Punkte)

c) (1) *Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$.*

Zur Kontrolle: Die Tangente hat die Steigung -1,5.

(2) *Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, eine Gleichung der Normalen n an den Graphen von f im Punkt* $P\left(3\middle|\frac{1}{4}\right)$.

Hinweis: Nutzen Sie die im Kasten dargelegten Informationen über den Begriff der Normalen.

Normale

Die Normale ist eine Gerade, die senkrecht zur Tangente an einen Graphen einer Funktion f durch deren Berührpunkt B verläuft, siehe Abbildung 2:

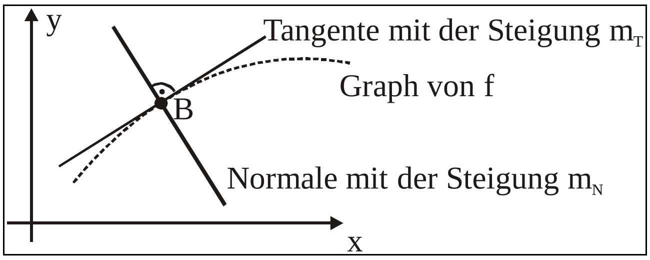


Abbildung 2

Die Steigung m_N berechnet man mithilfe der Gleichung: $m_T \cdot m_N = -1$; $(m_T \neq 0)$.

(3) Ermitteln Sie Näherungswerte für die Schnittstellen des Graphen von f mit der Normalen *n*.
Wenn Sie Teilaufgabe c(2) nicht lösen konnten, verwenden Sie bitte die Geradengleichung $y = 0{,}6 \cdot x - 1{,}55$ als eine Ersatzlösung anstelle der Normalengleichung.

(10 Punkte)

d) Unten ist eine Tabelle abgebildet.

(1) *Geben Sie die fehlenden Werte / Näherungswerte in den vier leeren Feldern an. Runden Sie dabei auf vier Nachkommastellen.*

(2) *Beschreiben Sie, welche Tatsache die Tabelle in Bezug auf die Ableitung verdeutlicht.*

Term	$\frac{f(3{,}5)-f(3)}{0{,}5}$	$\frac{f(3{,}05)-f(3)}{0{,}05}$	$\frac{f(3{,}005)-f(3)}{0{,}005}$	$\frac{f(3{,}0005)-f(3)}{0{,}0005}$
Wert / Näherungswert				

Tabelle

(5 Punkte)

Beispielaufgabe zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen

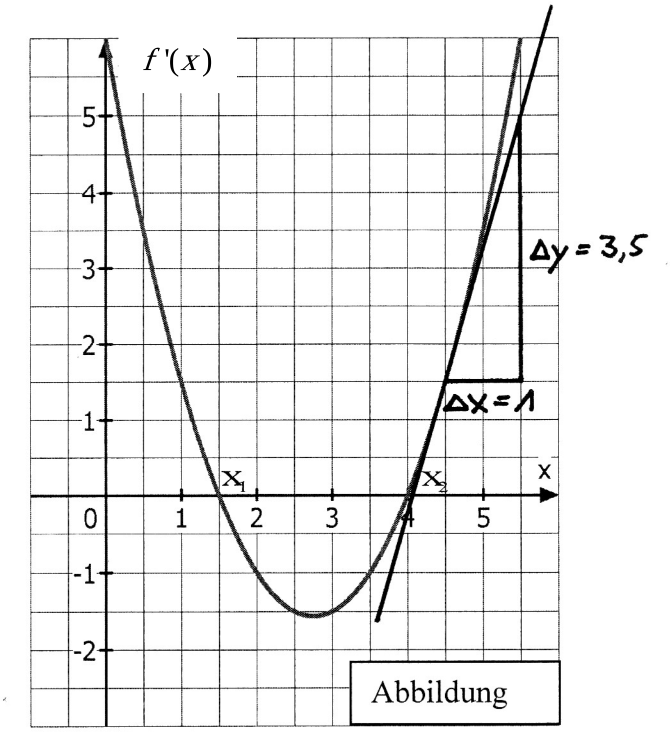
Beispiellösung

a) (1) $f'(x) = x^2 - 5{,}5x + 6$. Setze $f'(x) = 0$. Man erhält $x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = 4$.

Ein bloßes Ablesen der Nullstellen genügt wegen des Operators „Berechnen Sie“ nicht.

a (2) In der Abbildung 1 erkennt man an der ersten Nullstelle einen +/– - Vorzeichenwechsel der Ableitungswerte $f'(x)$. Das bedeutet, dass der Graph der Ausgangsfunktion f erst steigt und dann sinkt. Daher liegt an der Stelle $x = 1{,}5$ ein lokales Maximum vor.

b) Siehe Zeichnung: Die Steigung beträgt ca. 3,5.



c) (1) Für $t: y = m \cdot x + b$ gilt:

$m = f'(3) = -1{,}5$

Setze $m = -1{,}5$ und die Koordinaten von $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$ ein:

$\frac{1}{4} = -1{,}5 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 0{,}25 + 4{,}5 = 4{,}75$

Also $t: y = -1{,}5 \cdot x + 4{,}75$

Der Hinweis „ausgehend von einem mathematischen Ansatz“ in der Aufgabenstellung weist darauf hin, dass in der Lösung der Rechenweg angegeben soll und nicht nur die Tangentengleichung.

c (2) Für die Steigung m_N der Normalen n mit $n: y = m_N \cdot x + b_N$ gilt:

$m_N \cdot (-1{,}5) = -1 \Leftrightarrow m_N = \frac{2}{3}$

Setze $m_N = \frac{2}{3}$ und die Koordinaten von $P\left(3 \middle| \frac{1}{4}\right)$ ein:

$\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$

Also $n: y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{7}{4}$

c (3) Setze $f(x) = n(x)$, mit dem GTR ergibt sich $x \approx 0{,}05$, $x = 3$ und $x \approx 5{,}20$.

[Mit der Ersatzlösung erhält man: $x \approx 0{,}09$, $x = 3$ und $x \approx 5{,}16$.]

d) (1) –1,2917; –1,4867; –1,4987; –1,4999

d (2) Die Tabelle zeigt: Je mehr sich h im Differenzenquotienten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ der Zahl Null nähert, desto mehr nähert sich der Wert dieses Differenzenquotienten der Zahl $-1{,}5$, das ist der Wert der ersten Ableitung an der Stelle 3.

Beispiel einer Kontextaufgabe: Dämmung eines Dachzimmers

Ein Hersteller für Dämmstoffe hat die Temperatur in einem ungedämmten Zimmer unter dem Dach eines Hauses gemessen.
Der Temperaturverlauf wird über einen Zeitraum von 22 Stunden im Verlauf von zwei aufeinanderfolgenden Tagen durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 0{,}008 \cdot t^3 - 0{,}28 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 25{,}6\,;\; 0 \le t \le 22$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden nach 12:00 Uhr mittags des ersten Tages. $f(t)$ ist die Temperatur in dem ungedämmten Dachzimmer in °C.
Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

a) *Geben Sie in der Abbildung 1 in den beiden leeren Kästchen die entsprechenden Uhrzeiten an.*

Weisen Sie nach, dass am ersten Tag um 23:00 Uhr die Raumtemperatur ca. 24,4 °C betrug.

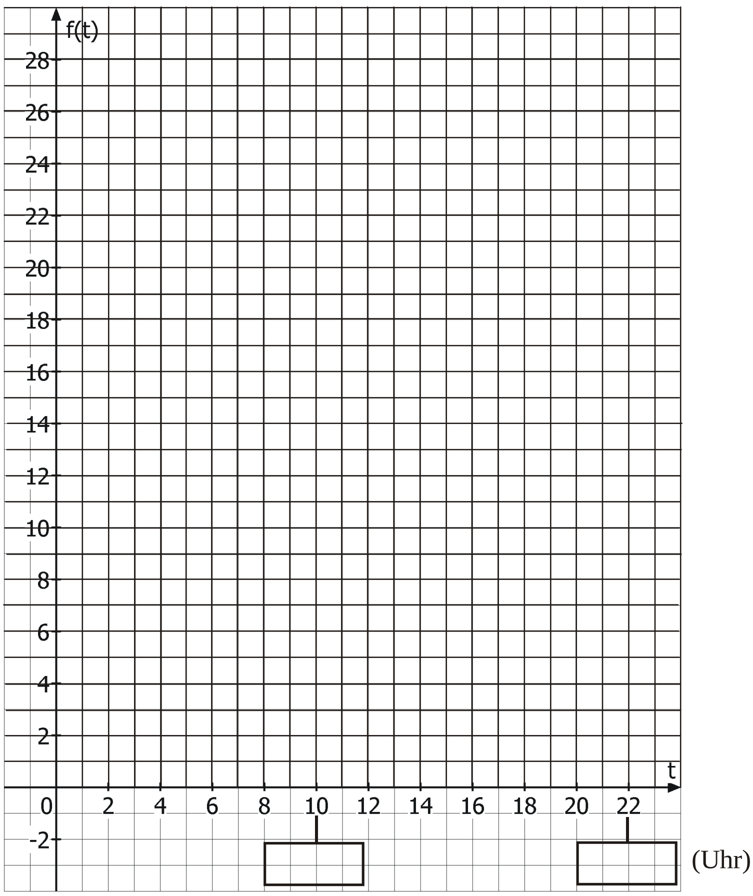


Abbildung 1 **(2 Punkte)**

b) *Ermitteln Sie, ausgehend von einem mathematischen Ansatz, für den ersten Tag im Zeitraum von 14:00 Uhr bis 20:00 Uhr einen ungefähren Wert für die Höchsttemperatur im ungedämmten Raum.*

(9 Punkte)

c) *Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in die Abbildung 1 ein.*

(4 Punkte)

d) *Weisen Sie nach, dass es in dem festgelegten Zeitintervall* $(0 \leq t \leq 22)$ *einen über* $3\frac{1}{2}$-*stündigen Zeitraum gab, in dem die Temperatur unter 18 °C lag.*

(4 Punkte)

e) Durch eine Dämmung des Dachraums mit den Materialien des Herstellers werden folgende drei Effekte erreicht:

- Die höchste Temperatur wird im Vergleich zu dem ungedämmten Raum erst zwei Stunden später erreicht, so dass die höheren Temperaturen erst dann in den Innenraum vordringen, wenn es draußen schon etwas abgekühlt ist.
- Die Temperaturhöhe schwankt nicht mehr so stark.
- Die tiefste Temperatur am Morgen ist im gedämmten Raum höher als die tiefste Temperatur am Morgen im ungedämmten Raum.

Der Hersteller hat für einen Kunden die Effekte in einer Handzeichnung (Abbildung 2) veranschaulicht.

(1) Wenn man den Graphen von f um zwei Einheiten nach rechts verschiebt, so erhält man den Graphen einer neuen Funktion g.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an.

(2) *Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion h, die zur Modellierung des Temperaturverlaufs in einem gedämmten Raum geeignet ist.*
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

(5 Punkte)

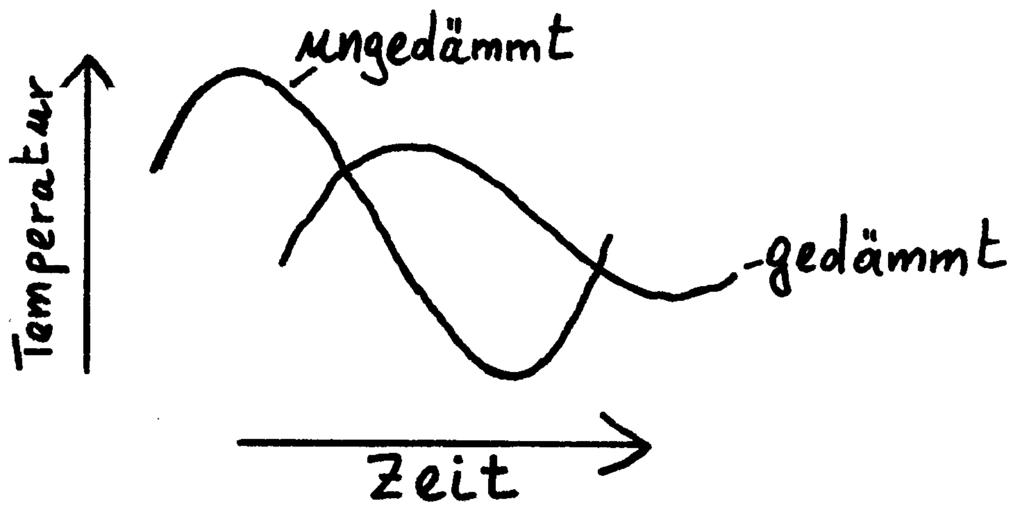
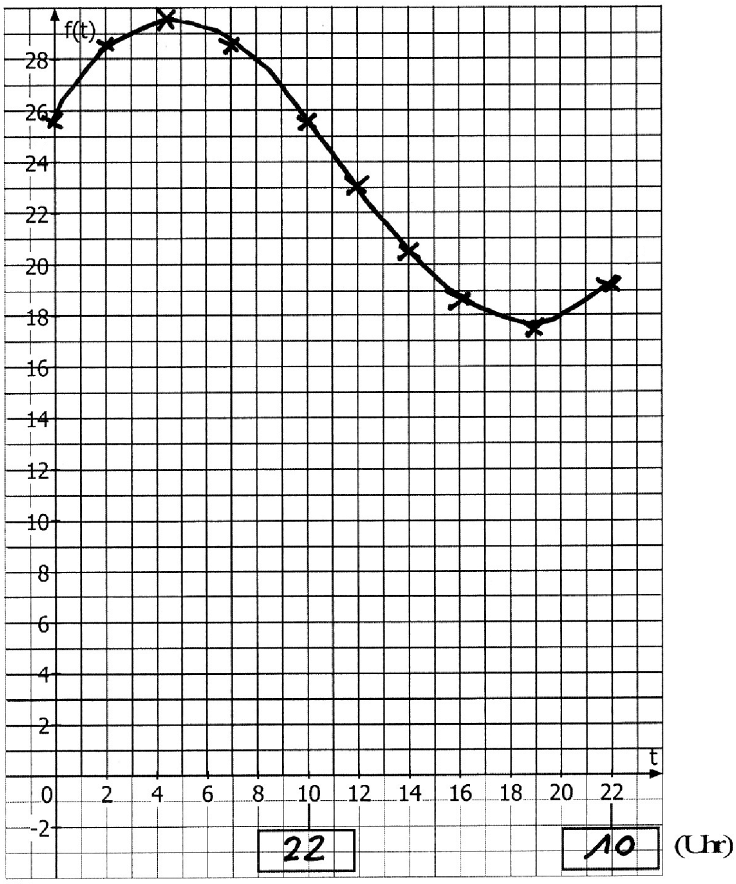


Abbildung 2

Beispiel einer Kontextaufgabe: Dämmung eines Dachzimmers

Beispiellösung

a) Uhrzeiten: siehe Zeichnung



$f(11) = 24,368 \approx 24,4$

Die Temperatur betrug also tatsächlich ca. 24,4 °C.

b) Es gilt: $f'(t) = 0,024t^2 - 0,56t + 2$. Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$.

Setze $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 0,024t^2 - 0,56t + 2 = 0$, mittels GTR erhält man $t \approx 4,4$ und $t \approx 18,9$.

$t \approx 18,9$ befindet sich nicht in dem angegebenen Intervall von 14 bis 20 Uhr (also $t \in [2;8]$).

Für die hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechselkriterium):

$f'(4) = 0,144 > 0$ und $f'(5) = -0,2 < 0$; also +/– -VZW von $f'(x)$.

$f(4,4) \approx 29,66$. Es ergibt sich ein lokales Maximum mit $y_H \approx 29,66$.

Randwertuntersuchung:

$f(2) \approx 28,54 < 29,66$ und $f(8) \approx 27,78 < 29,66$.

Die Höchsttemperatur am ersten Tag im Zeitraum von 14:00 Uhr bis 20:00 Uhr beträgt also ca. 29,7 °C.

Der Hinweis „ausgehend von einem mathematischen Ansatz“ in der Aufgabenstellung weist darauf hin, dass in der Lösung der Rechenweg angegeben werden soll. Die Ermittlung der Lösung durch ein Abtasten des Graphen oder die Angabe des entsprechenden Grafikrechnerbefehls reicht nicht aus.

Die Randwertuntersuchung gehört zum vollständigen Lösungsweg.

c) Siehe Zeichnung (Vorlage mit GTR).

d) Setze: $f(t)=18$. Mittels GTR erhält man für $0 \le t \le 22$: $t \approx 16{,}97$ und $t \approx 20{,}73$.

Da beispielsweise $f(17)=17{,}984$ gilt, liegen die Funktionswerte von f z.B. für $17 < t < 20{,}6$ unterhalb von 18. $20{,}6-17=3{,}6>3{,}5$.

Der Zeitraum, in dem die Temperatur unter 18 °C lag, beträgt daher mehr als 3,5 Stunden.

e) (1) $g(t)=f(t-2)=0{,}008\cdot(t-2)^3-0{,}28\cdot(t-2)^2+2\cdot(t-2)+25{,}6$

e) (2) Eine mögliche Lösung:

$$h(t)=0{,}5\cdot f(t-2)+11=0{,}004\cdot(t-2)^3-0{,}14\cdot(t-2)^2+(t-2)+23{,}8\,.$$

Die Rechts-Verschiebung um zwei Einheiten entlang der x-Achse erfolgt entsprechend der Lösung zur Aufgabe e) (1). Die Verminderung der Schwankung wird zunächst durch die Stauchung des Funktionsgraphen erreicht, hier mit dem Faktor 0,5. Anschließend muss der Graph der Funktion mit dem Funktionsterm $0{,}5\cdot f(t-2)$ auch noch in y-Richtung nach oben verschoben werden, hier beispielsweise um 11 Einheiten, um sich innerhalb des durch f gegebenen Rahmens zu bewegen.

Hinweis: In dieser Teilaufgabe bietet sich der Graphikrechner als Instrument planvollen Experimentierens an.